CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICA „PANAITOPOL”

EDIŢIA a VII-a, TULCEA, 1 aprilie 2017

Clasa a VII - a

Soluţii orientative şi bareme

Problema 1.

Se consideră trapezul *ABCD* în care $AB \| CD$ şi *E* este mijlocul laturii $[AD]$. Se construieşte trapezul *CEFG* astfel încât $EF \| CG$, iar *B* este mijlocul segmentului $[FG]$. Arătaţi că trapezele *ABCD* şi *CEFG* au arii egale.

Dacă $[EN]$ este linia mijlocie a trapezului *ABCD*, atunci $A_{EBC} = \frac{EN \cdot d(C,EN)}{2} + \frac{EN \cdot d(B,EN)}{2} = \frac{A_{ABCD}}{2}$.	**3p**
Analog, dacă $[BM]$ este linia mijlocie a trapezului *CEFG*, atunci $A_{EBC} = \frac{MB \cdot d(C,MB)}{2} + \frac{MB \cdot d(E,MB)}{2} = \frac{A_{EFGC}}{2}$.	**3p**
Deducem că $A_{ABCD} = A_{EFGC}$.	**1p**

Problema 2.

Se consideră un număr prim *p*, $p \geq 5$, şi numerele $a,b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-3} + \frac{1}{p-2}$.

Arătați că numerele *a* și *b* dau același rest la împărțirea cu *p* .

Suma are $p-2$ termeni, deci $\frac{a}{b} - 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{p-3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right)$ deoarece *p* este impar.	**2p**
Deci există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a-b}{b} = \frac{p \cdot n}{(p-2)!}$.	**2p**
Deoarece *p* este număr prim rezultă $(p;(p-2)!) = 1$ și, din ultima relație deducem că $p \mid (a-b)$. În concluzie numerele *a* și *b* dau același rest prin împărțirea la *p*.	**3p**

Problema 3.

a) Arătaţi că există o singură pereche de numere naturale nenule (m,n) care este soluţie a ecuaţiei $2xy + x + y - 60 = 0$.

b) Arătaţi că, oricum am considera la întâmplare 21 de numere naturale nenule mai mici decât 30, există printre acestea un număr *a* pentru care ecuaţia $4xy + 2x + 2y + 1 - a^2 = 0$ are soluţie unică în mulţimea numerelor naturale nenule.

a) Ecuaţia dată este echivalentă cu $4xy+2x+2y+1=121$ sau $(2x+1)(2y+1)=11^2$	**2p**
Deoarece 11 este prim, iar $2x+1$ şi $2y+1$ sunt mai mari decât 1, rezultă că $2x+1=2y+1=11$, adică soluţia este $(m,n)=(5,5)$	**1p**
b) Ecuaţia este echivalentă cu $(2x+1)(2y+1)=a^2$ şi are soluţie unică numai dacă *a* este număr prim cel puţin egal cu 3.	**2p**
Deoarece există 9 numere prime cel puţin egale cu 3 şi mai mici decât 30, printre cele 21 numere considerate există cel puţin unul dintre aceste 9 numere prime pe care îl notăm cu *a*. Soluţia ecuaţiei rezultate va fi $\left(\frac{a-1}{2},\frac{a-1}{2}\right)$	**2p**

Problema 4.

Se consideră trapezul *ABCD* în care $AB\|CD$, $m\left(\widehat{BAD}\right)=90^\circ$, iar $BD\cap AC=\{O\}$. Paralela prin *O* la bazele trapezului intersectează segmentele (AD) şi (BC) în punctele *E* şi respectiv *F*. Arătaţi că:

a) $\widehat{BEO}\equiv\widehat{CEO}$;

b) $EF=\frac{2\cdot AB\cdot DC}{AB+DC}<\frac{2\cdot EB\cdot EC}{EB+EC}$.

a) Din asemănarea triunghiurilor *COD* şi *AOB* obţinem $\frac{DO}{OB}=\frac{CO}{OA}=\frac{DC}{AB}$ (1), iar din *teorema lui Thales* aplicată în triunghiul *DAB* avem $\frac{DE}{EA}=\frac{DO}{OB}$ (2) Din (1) şi (2) deducem că triunghiurile *DEC* şi *AEB* sunt asemenea (LUL) . De aici rezultă că $\widehat{DEC}\equiv\widehat{AEB}$, deci complementele lor sunt congruente, adică $\widehat{CEO}\equiv\widehat{BEO}$.	**3p**
b) Din asemănarea triunghiurilor *DEO* şi *DAB* obţinem $\frac{DE}{DA}=\frac{EO}{AB}$ (3) . Analog, din asemănarea triunghiurilor *CFO* şi *CBA* obţinem $\frac{CF}{CB}=\frac{FO}{AB}$. Deoarece $\frac{DE}{DA}=\frac{DO}{DB}=\frac{CF}{CB}$, deducem $\frac{FO}{AB}=\frac{EO}{AB}$, deci $EO=OF$.	**2p**
Din asemănarea triunghiurilor *AEO* şi *ADC* avem $\frac{AE}{DA}=\frac{EO}{DC}$ (4) Prin adunare membru cu membru a relaţiilor (3) şi (4) obţinem $1=OE\cdot\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}\right)$, relaţie echivalentă cu $EF=\frac{2\cdot AB\cdot DC}{AB+DC}$. A doua parte a concluziei se obţine din $AB<EB$ şi $DC<EC$	**2p**